

فصل دوم: (آشنایی با مقاطع مخروطی)

درس نامه

درس ۱ (آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی)

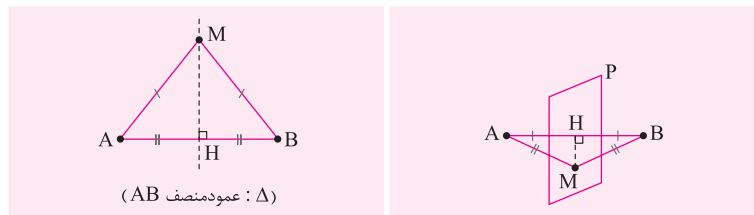
مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا که دارای ویژگی مشترک هستند.

مکان هندسی‌های مهم

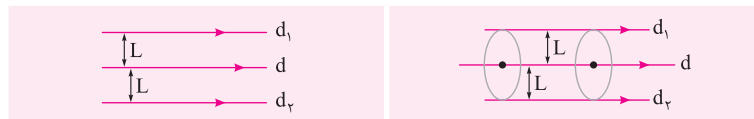
۱. دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله معلوم R هستند. همچنین مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه ثابت O به فاصله معلوم R هستند یک کره است.

۲. عمودمنصف: مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله هستند.

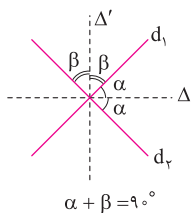
در فضا این مکان هندسی تبدیل به صفحه عمودمنصف می‌شود.



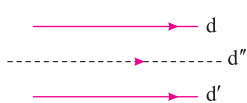
۳. مکان هندسی نقاطی که از خط ثابت d به فاصله معلوم L باشند: دو خط موازی با d و به فاصله L از آن می‌باشد. در فضا این مکان هندسی سطح جانبی یک استوانه نامتناهی می‌باشد.



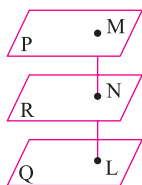
۴. نیمساز: مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع زاویه به یک فاصله هستند. همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، دو خط عمود بر هم هستند که نیمساز زوایای بین دو خط می‌باشند.



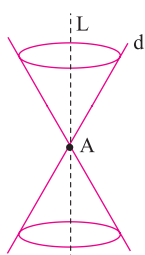
۵. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله‌اند خطی است مانند d'' که موازی آن‌هاست و از وسط فاصله بین آن‌ها مرور می‌کند:



در فضا، مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه P و Q به یک فاصله‌اند، صفحه R موازی با آن‌ها می‌باشد که از وسط فاصله بین آن‌ها می‌گذرد:

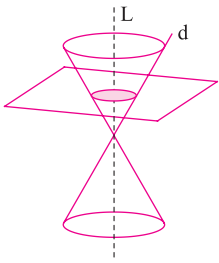


رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و L در نقطه A متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط L را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط L را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

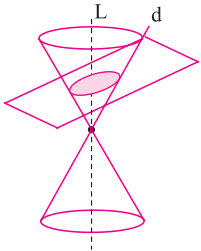


فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی

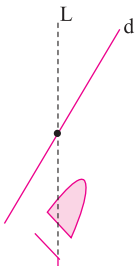
۱. در حالتی که صفحه P بر محور L عمود باشد و از رأس مخروط عبور نکند، مقطع حاصل دایره است.



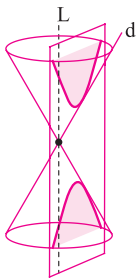
۲. در حالتی که صفحه P بر محور L عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل یک بیضی می‌باشد.



۳. اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.)



۴. اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور L نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی می‌باشد.



مثال ۱ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

(هماهنگ کشوری - شهریور ۱۳۰۱) (مثال کتاب درسی)

پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB می‌باشد. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی d_1 و d_2 به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن هستند. محل برخورد عمودمنصف (L) با دو خط موازی $(d_1$ و $d_2)$ پاسخ مسأله است (نقاط M و N).

بحث در تعداد جواب:

اگر L یکی از دو خط d_1 و d_2 را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند و مسأله دو جواب دارد. اگر L با دو خط d_1 و d_2 موازی باشد، مسأله جواب ندارد و اگر L بر یکی از دو خط d_1 و d_2 منطبق باشد، مسأله بی‌شمار جواب دارد.

مثال ۲ مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, R)$ مماس باشد را بیابید.

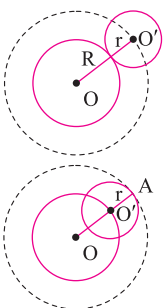
(تمرین کتاب درسی)

پاسخ:

حالت اول: در این حالت دایره به مرکز O' و شعاع r ، بر دایره $C(O, R)$ مماس خارج است. مکان هندسی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+r$ می‌باشد.

حالت دوم: در این حالت دایره به مرکز O' و شعاع r ، بر دایره $C(O, R)$ مماس داخل است. مکان هندسی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R-r$ می‌باشد.

$$OA = R, AO' = r \Rightarrow OO' = R - r$$



کدام یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است؟

۱. هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می‌شود، اگر صفحه p بر خط L عمود باشد، سطح مقطع صفحه p و سطح ایجاد شده بیضی است. (هماهنگ کشوری - دی ۱۴۰۱)

درست نادرست
 ۲. اگر صفحه p به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه p و سطح مخروطی یک هذلولی است. (هماهنگ کشوری - فرورداد ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۰)

درست نادرست
 ۳. در حالتی که صفحه p بر محور سطح مخروطی (L) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود. (هماهنگ کشوری - دی ۱۴۰۰ و شهریور ۹۹ و شهریور ۹۸)

درست نادرست
 ۴. مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه A است. (هماهنگ کشوری - فرورداد ۱۴۰۰)

درست نادرست
 ۵. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد. درست نادرست (هماهنگ کشوری - دی ۹۹)

درست نادرست
 ۶. مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد. (هماهنگ کشوری - شهریور ۹۹)

درست نادرست
 ۷. مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارجند، دایره $C(O, 2r)$ است. (هماهنگ کشوری - فرورداد ۹۹)

درست نادرست
 ۸. در حالتی که صفحه p بر محور سطح مخروطی (L) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود. (هماهنگ کشوری - فرورداد ۹۸ و دی ۹۹)

درست نادرست
- جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.
۹. اگر صفحه p با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه p و سطح مخروطی یک است. (هماهنگ کشوری - فرورداد ۱۴۰۰)
 ۱۰. از دوران خط d حول خط L که با آن موازی است به وجود می‌آید.
- به پرسش‌های زیر پاسخ کامل بدهید.
۱۱. نقطه A و خط d در صفحه مفروضند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید). (هماهنگ کشوری - دی ۹۹)
 ۱۲. نقاط A و B و C و D در صفحه مفروضند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید) (هماهنگ کشوری - فرورداد ۹۹)
 ۱۳. نقاط A و B و C در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید) (هماهنگ کشوری فرورداد ۱۴۰۱ و دی ۹۸ و شهریور ۹۸)
 ۱۴. خط d و نقطه A به فاصله ۳ از آن مفروضند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط d به فاصله ۱ و از نقطه A به فاصله ۴ باشد؟ (توضیح دهید) (تهران - دی ۱۴۰۱)
 ۱۵. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A بر خط L مماس‌اند را بیابید. (مشور - دی ۱۴۰۰)
 ۱۶. از مثلث ABC ، ضلع BC و میانه AM ثابت است. مکان هندسی رأس A را بیابید. (تهران - دی ۹۹)
 ۱۷. خط d و نقطه A در صفحه مفروضند. چند نقطه روی d وجود دارد که از A به فاصله ۳ سانتی‌متر می‌باشد؟ (نیشابور - دی ۹۸)

درس ۲ (دایره)

۱. معادله استاندارد دایره:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

شعاع دایره R و مرکز $O(\alpha, \beta)$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$$

$$O(2, 1), R^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$O(1, -2), R = \frac{\sqrt{4 + 16 - 4}}{2} = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

مثال ۳ مرکز و طول شعاع دایره مقابل را بیابید.

پاسخ:

۲. معادله ضمنی (گسترده):

مثال ۴ مختصات مرکز و طول شعاع دایره زیر را یافته و سپس معادله استاندارد آن را بنویسید.

پاسخ:

شرط وجود دایره حقیقی:

برای آنکه معادله گسترده داده شده، یک دایره حقیقی را مشخص کند باید داشته باشیم:

(۱) همواره باید ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشند.

(۲) همواره باید $a^2 + b^2 - 4c > 0$ باشد. اگر $a^2 + b^2 = 4c$ باشد، معادله دایره تبدیل به نقطه می‌شود.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مثال ۵ مقدار m را بیابید که $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 2m = 0$ معادله دایره باشد.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0$$

پاسخ: ابتدا باید ضرایب x^2 و y^2 را به ۱ برسانیم:

$$m < 5 \Rightarrow 16 + 4 - 4m > 0 \Rightarrow 20 - 4m > 0 \Rightarrow 5 - m > 0 \Rightarrow m < 5$$

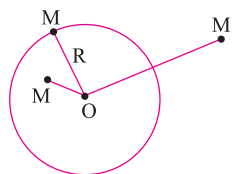
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0$$

مثال ۶ نقاط برخورد دایره روبرو را با محور عرض‌ها (در صورت وجود) بیابید.

$$x = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2, 1$$

پاسخ: برخورد با محور عرض‌ها:

وضعیت نسبی نقطه و دایره:



برای مشخص کردن وضعیت نقطه $M(x_0, y_0)$ نسبت به دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R (به شکل توجه کنید)، ابتدا طول پاره‌خط OM را به کمک فرمول فاصله دو نقطه پیدا می‌کنیم:

$$OM = \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2}$$

سپس این طول را با اندازه شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. داریم:

- نقطه M خارج دایره است. $\rightarrow OM > R$ اگر (۱)
- نقطه M روی محیط دایره است. $\rightarrow OM = R$ اگر (۲)
- نقطه M درون دایره است. $\rightarrow OM < R$ اگر (۳)

مثال ۷ از کدام یک از نقاط $A(-1, -1)$ و $B(2, 3)$ و $C(4, -1)$ مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ رسم نمی‌شود؟

پاسخ: اگر نقطه درون دایره باشد، نمی‌توان از آن نقطه مماس بر دایره رسم کرد. همچنین اگر نقطه روی محیط دایره باشد یک مماس و خارج دایره دو مماس می‌توان بر دایره رسم کرد.

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \rightarrow O(1, -2), R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4 \times (-5)}}{2}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{40} = \sqrt{10}$$

$$OA = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5} \rightarrow OA < R \rightarrow A \text{ بر دایره مماس رسم کرد.}$$

$$OB = \sqrt{(2-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{26} \rightarrow OB > R \text{ خارج دایره است و از } B \text{ دو مماس بر دایره رسم می‌شود.}$$

$$OC = \sqrt{(4-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{10} \rightarrow OC = R \text{ روی دایره قرار دارد و می‌توان از } C \text{ یک مماس رسم کرد.}$$